SUPERPOSIÇÃO DE ONDAS E ONDAS ESTACIONÁRIAS

1 – Superposição de Ondas

O princípio de superposição é uma propriedade do movimento ondulatório. Este princípio afirma que quando duas ondas ou mais se superpõem, a onda resultante é a soma algébrica da sondas individuais. Veja uma interessante simulação no endereço a seguir:
http://www2.biglobe.ne.jp/~norimari/science/JavaEd/e-wave2.html

Superposição e Equação de Onda

O princípio de superposição é conseqüência de a equação de onda ser linear para pequenos deslocamentos transversais. Se y_1 *e* y_2 *forem duas soluções diferentes da função de onda, a combinação linear a seguir também será (álgebra linear):*

$$y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (1)$$

onde C_1 *e* C_2 *são constantes arbitrárias.*

Interferência de Ondas Harmônicas

Seja y_1 *a função de onda de uma onda harmônica que avança para direita com amplitude* y_0*, a freqüência angular* w *e o número de onda* k *:*

$$y_1 = y_0 \operatorname{sen}(kx - wt) \qquad (2)$$

onde fizemos $t = 0$ *nos instante em que o deslocamento era nulo* $(y = 0)$ *em* $x = 0$*. Considere uma outra onda também avançando para direita com a mesma freqüência, mesma amplitude, mesmo número de onda e apenas com uma diferença de fase* d *(esta fase nos diz que no instante* $t = 0$*, em* $x = 0$ *a função apresentava um deslocamento, ou seja,* y *tinha um valor diferente de zero)representada pela função de onda* y_2 *:*

$$y_2 = y_0 \operatorname{sen}(kx - wt + d) \qquad (3)$$

A Figura 1 mostra as curvas, num certo instante, das duas funções de onda.

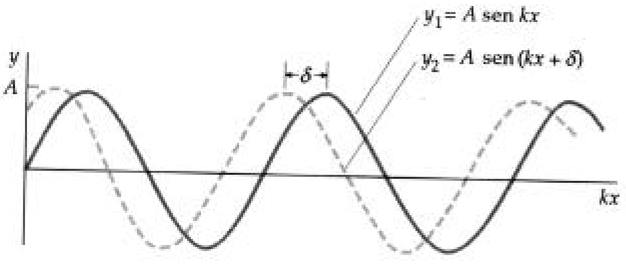

Fig. 1 – Deslocamento em função da posição de duas ondas harmônica com os mesmo parâmetros, porém, com uma diferença de fase.

A onda resultante será:

$$y_1 + y_2 = y_0 \operatorname{sen}(kx - wt) + y_0 \operatorname{sen}(kx - wt + d) \qquad (4)$$

Podemos simplificar a equação (4) utilizando a identidade trigonométrica:

$$\text{sen}\, q_1 + \text{sen}\, q_2 = 2\cos\frac{1}{2}(q_1 - q_2)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(q_1 + q_2).$$

Neste caso temos $q_1 = kx - wt$ *e* $q_2 = kx - wt + d$ *, assim,* $\frac{1}{2}(q_1 - q_2) = -\frac{1}{2}d$ *e* $\frac{1}{2}(q_1 - q_2) = kx - wt + \frac{1}{2}d$ *, substituindo na Equação (4) teremos:*

$$y_1 + y_2 = \left(2y_0 \cos\frac{1}{2}d\right)\text{sen}\left(kx - wt + \frac{1}{2}d\right) \tag{5}$$

onde foi usado que $\cos\left(-\frac{1}{2}d\right) = \cos\left(\frac{1}{2}d\right)$*. Note que a onda resultante tem a mesma freqüência, mesmo e mesmo número de onda das ondas originais. No entanto apresenta uma fase diferente das ondas originais. A amplitude desta onda é da por:*

$$A = 2y_0 \cos\frac{1}{2}d \;. \tag{6}$$

Analisando a Equação (6) se $d = 0$ *(ondas em fase) teremos* $A = 2y_0$*, ou seja, a amplitude será o dobros das ondas originais, chamamos isto de* ***interferência construtiva****. Se* $d = 180^\circ$*, teremos* $A = 0$*, ou seja,* ***interferência destrutiva****. Veja dois interessantes applets nos endereços eletrônicos a seguir:*

http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/waveSuperposition/waveSuperposition.html
http://physics.uwstout.edu/physapplets/Northwesten/www.physics.nwu.edu/vpl/waves/superposition1.html

Batimentos

Denomina-se de batimento a interferência de duas ondas de freqüências ligeiramente diferentes. Consideremos duas ondas sonoras de freqüências angulares w_1 *e* w_2*, com a mesma amplitude de pressão. A variação de pressão que percebemos pela audição é da por:*

$$p_1 = p_0\, \text{sen}\, w_1 t \tag{7a}$$

e

$$p_2 = p_0\, \text{sen}\, w_2 t \tag{7b}$$

A onda resultante será:

$$p = p_0\, \text{sen}\, w_1 t + p_0\, \text{sen}\, w_2 t = 2p_0 \cos\frac{1}{2}(w_1 - w_2)t\, \text{sen}\,\frac{1}{2}(w_1 + w_2)t \tag{8}$$

Tomando $w_{med} = \frac{(w_1 + w_2)}{2}$ *para a freqüência angular média e* $\Delta w = w_1 - w_2$ *para a diferença de freqüências angulares, a função resultante é:*

$$p = 2p_0 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta wt\right)\operatorname{sen} w_{med}t = 2p_0 \cos\left(2p\,\frac{1}{2}\Delta ft\right)\operatorname{sen} 2pf_{med}t \qquad (9)$$

onde fizemos $\Delta f = \Delta w/2p$ *e* $f_{med} = w_{med}/2p$.

A Figura 2 mostra o gráfico das variações de pressão, num ponto fixo, em função do tempo.

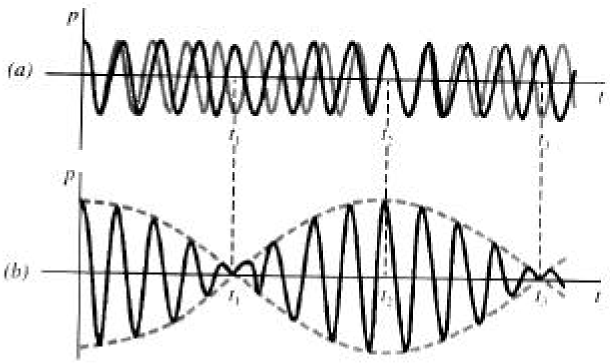

Fig. 2 – Batimento. a) duas ondas de freqüências ligeiramente diferentes. b) resultante das duas ondas em (a). Consulte o endereço a seguir para ter acesso a uma simulação sobre este assunto.
.http://lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/applist/beats/b.htm

O som que ouvimos tem freqüência $f_{med} = \dfrac{(f_1 + f_2)}{2}$ *e amplitude* $2p_0 \cos\left(2p\Delta ft/2\right)$. *A amplitude oscila com a freqüência* $\Delta f/2$ *e como a intensidade do som é proporcional ao quadrado da amplitude, nó ouvimos um som forte sempre a amplitude está num máximo ou num mínimo. Esta freqüência de oscilação de máximo e mínimo, que é o dobro de* $\Delta f/2$ *, é a freqüência de batimentos:*

$$f_{bat} = \Delta f \qquad (10)$$

A freqüência de batimentos é a diferença entre freqüência de duas ondas. Se dois geradores de sinais emitirem um em 401 Hz e outro em 403 Hz, ouviremos um som pulsante com freqüência média de 402 Hz e um máximo de intensidade 2 vezes por segundo (freqüência de batimentos). Simule esta situação no endereço a seguir:

http://www.explorescience.com/activities/Activity_page.cfm?ActivityID=44

Diferença de Fase Devido à Diferença de Percurso

*A diferença de fase entre duas ondas pode ser provocada pela diferença de percurso entre o ponto de superposição e as fontes das ondas. Se a diferença de percurso for de um comprimento de onda, ou de um número inteiro de comprimentos de onda, a **interferência será construtiva**. Se a diferença for de meio comprimento de onda ou de um número ímpar de meios-comprimentos de onda, o máximo de uma onda coincide com o mínimo da outra, e a **interferência será destrutiva**.*

Considere duas ondas em fase geradas por duas fontes distintas em locai diferentes (por exemplo, dois alto-falantes em lugares diferentes em uma sala):

$$p_1 = p_0 \,\mathrm{sen}(kx_1 - wt)$$
$$p_2 = p_0 \,\mathrm{sen}(kx - wt)$$

A diferença de fase das duas funções é dada por:

$$d = (kx_2 - wt) - (kx_1 - wt) = k(x_2 - x_1) = k\Delta x$$

Fazendo $k = {}^{2p}\!/\!{}_{l}$ *teremos:*

$$d = 2p\frac{\Delta x}{l} = \left(360^\circ\right)\frac{\Delta x}{l}. \qquad (11)$$

A equação (11) mostra que a diferença de fase d *depende do comprimento de onda* (l) *e da diferença de percurso* (Δx).

A Figura 3 mostra a configuração das ondas de duas fontes puntiformes, que oscilam em fase e estão separadas por uma pequena distancia.

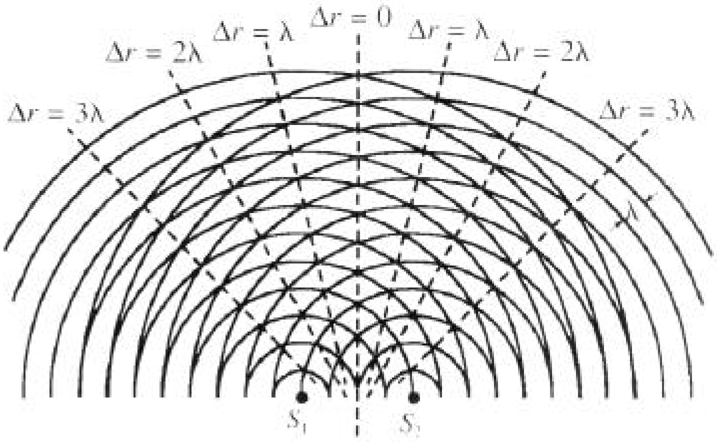

Fig. 3 – Ondas provocadas por duas fontes oscilando em fase próxima uma da outra. As restas tracejadas mostram os pontos em que a diferença de percurso é múltiplo inteiro de l *. O endereço a seguir mostra uma boa simulação deste fenômeno:* http://surendranath.tripod.com/Interference/Ripint.html

A Figura 4 mostra a variação da intensidade da onda resultante das duas fontes em função da diferença de percurso.

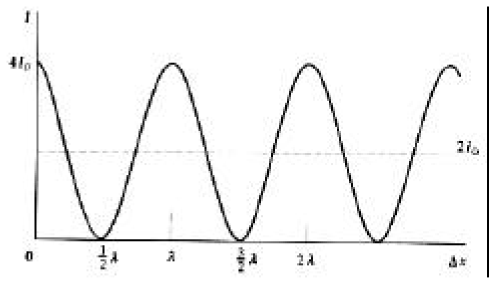

Fig. 4 – Variação da intensidade em função da diferença de percurso. I_0 *é a intensidade de cada fonte isolada.*

Nos ponto onde a interferência é constritiva a intensidade é 4 vezes maior do que a intensidade de cada onda, pois a amplitude é o dobro e a intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude. Nos ponto de intensidade destrutiva a intensidade é nula. A intensidade média, representada pela reta horizontal tracejada, é o dobro da intensidade das ondas individualmente.

Fontes coerentes *– São fontes que estão em fase ou que apresentam uma diferença de fase constante.*

Fontes incoerentes *– São fontes que não apresentam uma diferença de fase constante com o passar do tempo, ou seja, a diferença de fase varia aleatoriamente.*

Experiência de dupla fenda *– A luz é resultado da irradiação independente de milhões de átomo, a diferença de fase entre as ondas destas fontes flutua aleatoriamente. Em ótica se consegue coerência pela divisão do feixe luz de uma fonte em um ou mais de dois feixes que podem ser recombinados para se ter uma figura de interferência. Esta experiência foi utilizada por Thomas Young, em 1801, para demonstrar mostrar a natureza ondulatória da luz. A intensidade da luz é máxima quando a diferença de percurso entre um ponto do anteparo e as duas fendas é número inteiro de* λ *. Veja dois interessantes applets nos seguintes endereços eletrônicos:*
http://www.colorado.edu/physics/2000/applets/twoslitsa.html
http://surendranath.tripod.com/DblSlt/DblSltApp.html

2 – Ondas Estacionárias

Ondas confinadas no espaço, por exemplo, ondas nas cordas de um violão, podem originar configurações estacionárias. Isto ocorre porque teremos ondas se deslocando direções opostas. Estas ondas se superpõem de acordo com princípio de superposição. Existem certas freqüências para quais a superposição provoca uma onda estacionária. O endereço a seguir apresenta uma simulação sobre este tópico:
http://www2.biglobe.ne.jp/~norimari/science/JavaEd/e-wave4.html

Corda fixa nas duas extremidades

A Figura 5 mostra as configurações de ondas estacionárias numa corda presa nas duas extremidades. As freqüências responsáveis por estas configurações são as freqüências naturais de ressonância da corda. Cada freqüência está associada a um modo de vibração. O primeiro modo é denominado de ***modo fundamental*** *(ou primeiro harmônico), a freqüência (tem o dobro da primeira) de ressonância imediatamente seguinte é o segundo harmônico e assim sucessivamente. Os pontos de máximos são denominados de* ***ventre*** *e os de mínimo de* ***nó****.*

Analisando a Figura 5 e fazendo uma associação com o comprimento de onda de cada harmônico, o comprimento da corda e o número de ventres, obtemos a seguinte relação:

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}, \quad n = 1,2,3... \qquad (12)$$

Este resultado é a condição de onda estacionária. Em termos de freqüência podemos escrever:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2L/n} = n\frac{v}{2L} = nf_1 \quad n = 1,2,3.... \tag{13}$$

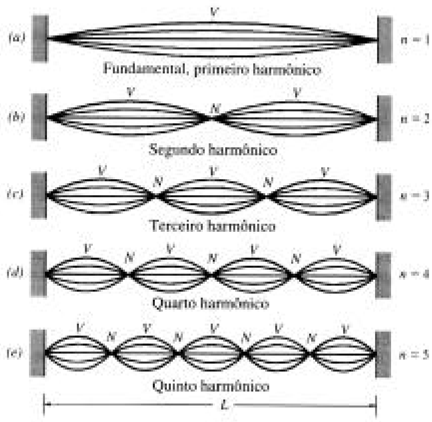

Fig. 5 – Ondas estacionárias numa corda com as extremidades fixas. Veja dois interessantes applets nos links: http://users.erols.com/renau/harmonics.html e http://www.falstad.com/loadedstring/.

Corda fixa em uma extremidade

A Figura 6 mostra as configurações de onda estacionária para uma corda presa em apenas uma de suas extremidade.

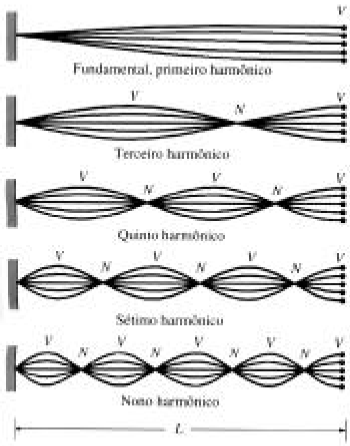

Fig 6 – Ondas estacionárias numa corda presa em apenas uma ponta

De modo análogo ao anterior, a condição de onda estacionária é dada por:

$$L = n\frac{\lambda_n}{4L}, \quad n = 1,3,5... \tag{14}$$

As freqüências de ressonância são:

$$f_n = n\frac{v}{4L} = nf_1 \quad n = 1,3,5... \tag{15}$$

Funções de onda das ondas estacionárias

A função deslocamento é dada por:

$$y_n(x,t) = A_n(x)\cos(w_n + d_n)\ , \tag{16}$$

onde $A_n(x)$ *é a forma da corda num instante qualquer e é dada por:*

$$A_n(x) = A_n \operatorname{sen} k_n x\,.$$

Assim, a função de onda de uma onda estacionária do n-ésimo harmônico será:

$$y_n(x,t) = A_n \operatorname{sen} k_n x \cos(w_n t + d_n) \tag{17}$$

Ondas sonoras estacionárias

Uma onda sonora pode ser descrita como uma onda de pressão ou onda de deslocamento. As condições de onda estacionária são as mesmas de uma corda. Na onda sonora, as variações de pressão e de deslocamento estão 90° fora de fase. Assim, numa onda sonora estacionária, os nós de pressão são os ventres de deslocamento e vice-versa. Por exemplo, a extremidade aberta de um tubo de órgão é um nó de pressão e um ventre de deslocamento; a extremidade fechada é um ventre pressão e um nó de deslocamento. Veja uma interessante simulação no endereço abaixo:
http://physics.uwstout.edu/physapplets/a-city/physengl/stlwaves.htm

3 – Superposição de ondas estacionárias

Em geral, um sistema não vibra num único modo harmônico. O seu movimento é o resultado da mistura de vários modos harmônicos possíveis. A função de onda é uma combinação linear das funções de ondas harmônicas:

$$y(x,t) = \sum_n A_n \operatorname{sen} k_n x \cos(w_n t + d_n) \tag{18}$$

A maior parte da energia da onda está associada ao modo fundamental, mas pequenas frações de energia são pertinentes aos outros modos.

4 – Análise harmônica (análise de Fourier) e síntese harmônica

A Figura 7 mostra o gráfico das variações de pressão em função do tempo para 3 instrumentos tocando uma mesma nota. A formas de onda são bastante diferentes. As notas têm a mesma altura (provoca a mesma sensação de som), porém difere por uma qualidade que é denominada de ***timbre****. A principal razão desta diferença de timbre, são os harmônicos que acompanham a fundamental emitida pelos instrumentos (os harmônicos presentes na forma de onda de cada instrumento têm intensidades diferentes).*

As formas de ondas podem ser estendidas nos harmônicos que as constituem. Este método é denominado de ***Análise de Fourier*** *(resultado dos trabalhos do matemático francês J.*

Fourier). O inverso da análise harmônica é a ***síntese harmônica****, que trata da construção de uma onda periódica pela superposição de componentes harmônicos. A Figura 8 mostra os três primeiros harmônicos ímpares que levam à síntese de uma onda quadrada.*

Veja uma excelente simulação no endereço eletrônico a seguir:
http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/sound/sound.html

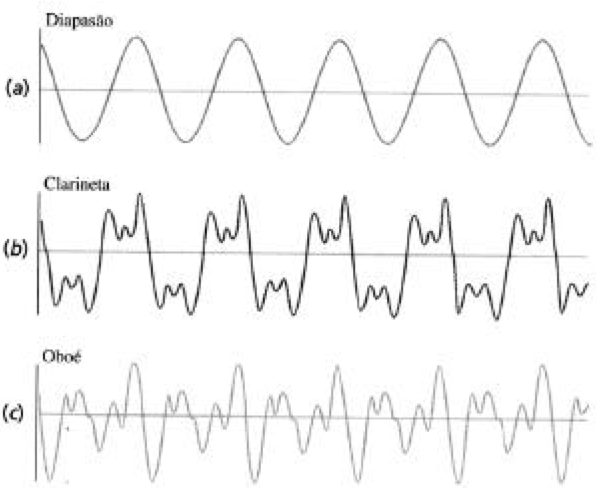

Fig. 7 – Formas de onda da vibração (a) de um diapasão, (b) de uma clarineta e (c) de um oboé (Instrumento musical de sopro, feito de madeira, de timbre semelhante ao do clarinete, mas levemente nasal).

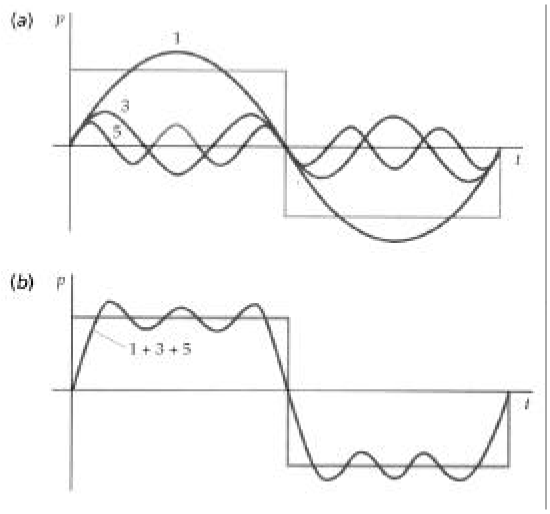

Fig. 8 – (a) os três primeiros harmônicos ímpares de uma onda senoidal simples, usados para sintetizar uma onda quadrada. (b) A aproximação de uma onda quadrada resultante da soma dos três primeiros harmônicos ímpares mencionados em (a).

5 – Pacotes de ondas e dispersão

É bom salientar que o modelo de onda harmônica considera a onda periódica no tempo, ou seja, se repete indefinidamente. Na realidade, nós não temos este comportamento na natureza e sim a existência de ***pulsos ondulatórios****. Os pulsos ondulatórios não são periódicos, ou seja, eles têm princípio e fim. Estes pulsos também podem ser representados por um grupo de ondas (denominado de* ***pacote de ondas****). No entanto, a síntese de um pulso exige uma distribuição contínua de freqüências, ao contrário das ondas harmônicas que podem ser representadas por uma distribuição discreta de freqüências.*

Se a duração de um pulso for muito curta, Δt*, o intervalo de freqüências,* Δw*, necessário para descrevê-lo é muito grande. A relação entre estas duas grandezas é dada por:*

$$\Delta w \Delta t \approx 1 \qquad (19)$$

A largura do pulso e o intervalo de número de onda estão relacionados por:

$$\Delta k \Delta x \approx 1 \qquad (20)$$

Meio não-dispersivo *– O pacote de onda mantêm sua forma à medida que avança no meio, todos os componentes do pacote se deslocam com a mesma velocidade. Neste caso, a velocidade das ondas* *não depende do comprimento de onda nem da freqüência. O ar é um exemplo deste meio para ondas sonoras.*

Meio dispersivo – *Existe dependência entre a velocidade de onda e a freqüência ou o comprimento de onda. O pacote de onda muda de forma ao avançar.*

Velocidade de grupo – *A velocidade com que avança uma onda num meio dispersivo. Esta velocidade não coincide com a* **velocidade de fase** *das componentes harmônicas do pacote. Por exemplo, a velocidade de grupo das ondas superficiais em águas profundas é a metade da velocidade de fase das ondas harmônicas componentes. Os sólidos e líquidos em geral são dispersivos para ondas sonoras. Um efeito mais comum de dispersão é o arco-íris, que se forma em virtude de a velocidade das ondas luminosas na água dependerem da freqüência e do comprimento de onda.*

Exercícios

1. *Duas ondas com freqüências, comprimentos de onda e amplitudes respectivamente iguais avançam numa mesma direção. a) Se a diferença de fase entre elas for de* $p/2$ *es e a amplitude de ambas for de 4,0 cm, qual a amplitude da onda resultante? b) Para que diferença de fase* d *a amplitude resultante será igual a 4,0 cm?*
2. *Quando se faz soar um diapasão de 440 Hz (o lá da afinação de uma orquestra) e a corda lá de violão desafinado, percebem-se 3 batimentos por segundo. Depois de apertar um pouco a cravelha da corda, a freqüência dos batimentos aumenta para 6 por segundo. Qual a freqüência da nota da corda depois de apertada?*
3. *Duas fontes sonoras oscilam em fase. Num ponto a 5,00 m de uma e a 5,17 m da outra, a amplitude da pressão da onda de cada fonte, separadamente, é* p_0. *Determinar a amplitude da onda resultante se a freqüência das ondas sonoras for de a) 1.000 Hz, b) 2.000 Hz e c) 500 Hz. (considere a velocidade do som como 340 m/s)*
4. *Uma corda está tensionada entre dois suportes fixos, separados pela distancia de 0,7 m, e a tensão é ajustada até que a freqüência fundamental da corda seja a da nota lá de afinação, 440 Hz. Qual a velocidade das ondas transversais da corda?*
5. *Uma corda com comprimento de 3 m e 0,0025 kg/m de densidade linear de massa está fixada em duas extremidades. Uma de suas freqüências de ressonância é de 252 Hz. A freqüência de ressonância imediatamente seguinte a esta é 336 Hz. (a) A que harmônico corresponde à freqüência de 252 Hz? c) Qual a freqüência fundamental? d) Qual a tensão na corda?*

Exercícios para casa

Vide o livro 4ª edição (capítulo 16)
De 1 a 14, 26 e 27, 32 a 35, 37 a 43.